



TITLE:

実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbf{R})$ の3次元モデルと部分群の可視化 (数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究)

AUTHOR(S):

前田, 陽一

CITATION:

前田, 陽一. 実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbf{R})$ の3次元モデルと部分群の可視化 (数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究). 数理解析研究所講究録 2018, 2067: 74-84

ISSUE DATE:

2018-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/241936>

RIGHT:

実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbf{R})$ の3次元モデルと 部分群の可視化

東海大学・理学部 前田 陽一 (Yoichi Maeda)¹
School of Science,
Tokai University

Abstract. この論文では, 実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbf{R})$ を動的幾何学ソフトウェアを用いて可視化できることを紹介する. $SL(2, \mathbf{R})$ から3次元球面 S^3 に埋め込み, さらに3次元球面 S^3 から3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 に立体射影することにより, $SL(2, \mathbf{R})$ の各元が3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 内の一点と対応することになる. このモデルを用いて $SL(2, \mathbf{R})$ の群構造を幾何的に理解することが最終的な目標である. 今回は, トレースが一定の曲面, 一次元部分群, 二次元部分群の形状について調べる. 有名な幾何図形である直角双曲線やレムニスケートがトレースと関係していることを見る. また, ある単位球面上の曲線が, トレース一定の曲面, 部分群の形状と深くかかわっていることを示す. 本研究で用いる数学ソフトウェアは Cabri II plus, Cabri 3D, GeoGebra と Mathematica である.

1 群 $SL(2, \mathbf{R})$ の3次元モデル

この節では, まず群 $SL(2, \mathbf{R})$ の3次元モデルについて述べる. 群 $SL(2, \mathbf{R})$ の定義は,

$$SL(2, \mathbf{R}) = \{A \in M(2, \mathbf{R}) \mid \det A = 1\}$$

であり, $SL(2, \mathbf{R})$ は4次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^4 の中の3次元多様体である. $SL(2, \mathbf{R})$ を3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 で可視化するアイディアは,

- (1) $SL(2, \mathbf{R})$ から3次元球面 S^3 への写像を考え,
 - (2) 次に, S^3 から \mathbf{R}^3 へ立体射影する,
- ことによって実現される.

3次元球面 S^3 から一つの大円を取り除いた開集合を

$$S^3 \setminus \{u = 0\} = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid |u|^2 + |v|^2 = 1, u \neq 0\}$$

とする. 3次元球面上の点 $(u, v) \in S^3 \setminus \{u = 0\}$ に対して, 次の行列を考えよう.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{|u|^2} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(u) + |u|\operatorname{Re}(v) & \operatorname{Im}(u) + |u|\operatorname{Im}(v) \\ -\operatorname{Im}(u) + |u|\operatorname{Im}(v) & \operatorname{Re}(u) - |u|\operatorname{Re}(v) \end{pmatrix}.$$

¹maeda@tokai-u.jp

この行列 A の行列式を計算すると,

$$\begin{aligned}\det A &= \frac{1}{|u|^4} (\operatorname{Re}(u)^2 - |u|^2 \operatorname{Re}(v)^2 + \operatorname{Im}(u)^2 - |u|^2 \operatorname{Im}(v)^2) \\ &= \frac{1}{|u|^4} (|u|^2 - |u|^2 |v|^2) = \frac{1}{|u|^2} (1 - |v|^2) = 1.\end{aligned}$$

行列式が 1 になるので A は $SL(2, \mathbf{R})$ の元となる. これで, 3次元球面内の集合 $S^3 \setminus \{u=0\}$ から $SL(2, \mathbf{R})$ への写像が定義できた.

今度は逆に, $A \in SL(2, \mathbf{R})$ の要素 a, b, c, d から u, v を決定してみよう.

$$\begin{aligned}a + d &= \frac{2}{|u|^2} \operatorname{Re}(u), & a - d &= \frac{2}{|u|} \operatorname{Re}(v), \\ b - c &= \frac{2}{|u|^2} \operatorname{Im}(u), & b + c &= \frac{2}{|u|} \operatorname{Im}(v),\end{aligned}\tag{1}$$

なので, 次の式が成り立つ,

$$(a + d)^2 + (b - c)^2 = \frac{4}{|u|^4} |u|^2 = \frac{4}{|u|^2}.$$

ここで, $r = \sqrt{(a + d)^2 + (b - c)^2}$ とおくと,

$$|u| = \frac{2}{r},\tag{2}$$

となる ($r = \sqrt{(a - d)^2 + (b + c)^2 + 4} \geq 2$ であることに注意されたい). 式 (1), (2) を用いると次の関係式が導かれる.

$$\begin{cases} u = \frac{2}{r^2} \{(a + d) + (b - c)i\}, \\ v = \frac{1}{r} \{(a - d) + (b + c)i\}.\end{cases}$$

以上により, $S^3 \setminus \{u=0\}$ と $SL(2, \mathbf{R})$ の間の一対一写像が得られた. 3次元球面 S^3 の南極 $(u, v) = (-1, 0)$ から 3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 への立体射影は次の式で与えられる ([2] p.24).

$$(X, Y, Z) = \frac{(\operatorname{Re}(v), \operatorname{Im}(v), \operatorname{Im}(u))}{1 + \operatorname{Re}(u)} = \frac{(r(a - d), r(b + c), 2(b - c))}{r^2 + 2(a + d)}.\tag{3}$$

この射影において, 除外集合 $\{u=0\}$ ($|v|=1$) は, XY -平面上の単位円に対応しており, $SL(2, \mathbf{R})$ が単連結でないことを示している.

図 1.1 において, すでにいくつかの部分群が可視化できている. 式 (3) より, XY -平面は対称行列 ($b = c$) の集合に対応している. 同様に, YZ -平面は $a = d$ の集合

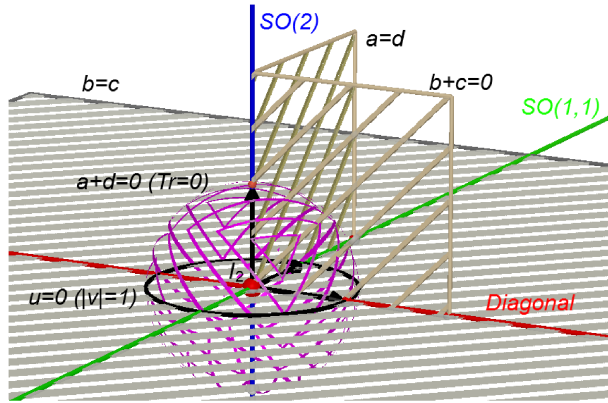


図 1.1: $SL(2, \mathbf{R})$ の 3 次元モデル.

に対応しており, ZX -平面は $b+c=0$ の集合に対応している. 単位球面はトレースの値が 0 の集合 ($\text{Tr}(A) = a+d=0$) に対応している. 単位球面は 3 次元球面 S^3 の赤道面に対応するので $\text{Re}(u) = 0$ であるが, 式 (1) より, $a+d=0$ と同値となるというのがその理由である. 以上の考察より, X 軸, Y 軸, Z 軸はそれぞれ次のような部分群と対応していることがわかる.

$$\pm \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

単位行列 I_2 は原点 $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ にある. 一方, $-I_2$ は無限遠点にあり, このモデルでは唯一見えない点である.

このようにして, $SL(2, \mathbf{R})$ のうち $-I_2$ を除くすべての元を \mathbf{R}^3 内の点と対応させることができる.

2 5つの平面曲線を内包する球面上の曲線

前節で導入した 3 次元モデルを用いて解析するにあたって, 単位球面上のある曲線 C_0 が重要な役割を果たす. この節では, 次の式で定義されるパラメーター曲線 C_0

$$(x, y, z) = (\sin \theta, \sin \theta \cos \theta, \cos^2 \theta). \quad (4)$$

を考察しよう. この空間曲線 C_0 は, 次の式で表される 5 つの平面曲線 (円, 放物線,

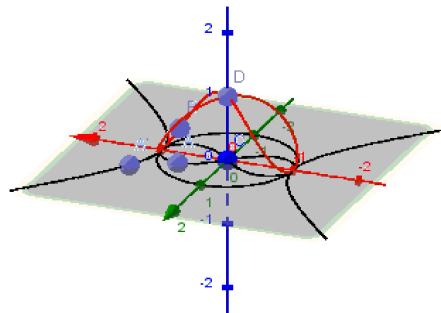


図 2.1: 5つの曲線のジェネレーターとしての空間曲線 $C = 0$.

双曲線, レムニスケート, リサージュ図形) のジェネレーターになっている.

$$\begin{aligned} y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\ z &= -x^2 + 1, \\ x^2 - y^2 &= 1, \\ x^2 - y^2 &= (x^2 + y^2)^2, \\ x^2 - x^4 &= y^2. \end{aligned}$$

これら5つの平面曲線は, 正射影と立体射影によって得られる (図 2.1).

式 (4) より,

$$x^2 + z = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

であるから, 曲線 C_0 の XZ -平面への正射影は放物線 $z = -x^2 + 1$ となる.

また, 式 (4) は次のように式変形できる.

$$(x, y, z) = \left(\sin \theta, \frac{1}{2} \sin 2\theta, \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \right). \quad (5)$$

したがって, 曲線 C_0 の XY -平面への正射影は, 次の式で定義されるリサージュ曲線

$$(x, y) = \left(\sin \theta, \frac{1}{2} \sin 2\theta \right),$$

で, このリサージュ図形は $x^2 - x^4 = y^2$ と表される.

さらに, 曲線 C_0 の YZ -平面への正射影については, 式 (5) より,

$$y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta + \frac{1}{4} \cos^2 2\theta = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

と変形できる. このことは空間曲線 C_0 が単位球面と円柱 (原点 $O = (0, 0, 0)$ と単位球面の北極 $N = (0, 0, 1)$ を直径とし, 軸が x 軸と平行な円柱) との交線であるこ

とを示している.

以上, 3 平面への正射影が円, 放物線, リサージュ曲線であることを見てきたが, 今度は立体射影の像を調べてみよう. 北極 $N = (0, 0, 1)$ から XY -平面への立体射影を考えると,

$$(X, Y) = \frac{(x, y)}{1 - z} = \frac{(\sin \theta, \sin \theta \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{(1, \cos \theta)}{\sin \theta}.$$

したがって,

$$X^2 - Y^2 = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 1,$$

これは直角双曲線である.

一方, 南極 $S = (0, 0, -1)$ から XY -平面への立体射影はレムニスケートになることが次の計算で求められる.

$$(X, Y) = \frac{(x, y)}{1 + z} = \frac{(\sin \theta, \sin \theta \cos \theta)}{1 + \cos^2 \theta}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} X^2 - Y^2 &= \frac{\sin^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{(1 + \cos^2 \theta)^2} = \frac{\sin^4 \theta}{(1 + \cos^2 \theta)^2} \\ X^2 + Y^2 &= \frac{\sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)}{(1 + \cos^2 \theta)^2} = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \end{aligned}$$

となり, レムニスケートの方程式 $X^2 - Y^2 = (X^2 + Y^2)^2$ を満たすことがわかる. 因みに, 双曲線 $X^2 - Y^2 = 1$ とレムニスケート $X^2 - Y^2 = (X^2 + Y^2)^2$ は単位円 $X^2 + Y^2 = 1$ に関して反転の関係にある. これは, 北極 N からの立体射影と南極 S からの立体射影の合成で反転が得られることから理解できる.

次節以降で, $SL(2, \mathbf{R})$ の 3 次元モデルを解析していくが, 結論を先に言うとレムニスケート $X^2 - Y^2 = (X^2 + Y^2)^2$ はトレースの値が 2 の行列の集合と関係している. また, 双曲線 $X^2 - Y^2 = 1$ はトレースの値が -2 の行列の集合と関係している. 空間曲線 C_0 が重要な空間曲線であることが, 次節以降で明らかになる.

3 トレース一定曲面の可視化

この節では, トレースの値が一定の曲面について調べよう. 実は, トレースの値が一定の曲面は Z 軸周りの回転面である. たとえば, トレースの値が -2 ($\text{Tr}(A) = -2$) の場合, 式 (1) より $\text{Re}(u) = -|u|^2$ である. $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ とおくと, 式 (3) を用いて,

$$\begin{aligned} R^2 &= X^2 + Y^2 = \frac{|v|^2}{(1 + \text{Re}(u))^2} = \frac{1 - |u|^2}{(1 - |u|^2)^2} = \frac{1}{1 - |u|^2}, \\ Z^2 &= \frac{\text{Im}(u)^2}{(1 + \text{Re}(u))^2} = \frac{|u|^2 - \text{Re}(u)^2}{(1 - |u|^2)^2} = \frac{|u|^2 - |u|^4}{(1 - |u|^2)^2} = \frac{|u|^2}{1 - |u|^2}. \end{aligned}$$

したがって, $R^2 - Z^2 = 1$ となり, この曲面は一葉双曲面である. 同様に, $\text{Tr}(A) = 2$ の場合を調べてみると, 式 (1) より, $\text{Re}(u) = |u|^2$ である. このとき,

$$R^2 = \frac{1 - |u|^2}{(1 + |u|^2)^2}, \quad Z^2 = \frac{|u|^2(1 - |u|^2)}{(1 + |u|^2)^2},$$

であるから,

$$R^2 + Z^2 = \frac{1 - |u|^2}{1 + |u|^2}, \quad R^2 - Z^2 = \frac{(1 - |u|^2)^2}{(1 + |u|^2)^2}.$$

したがって, $R^2 - Z^2 = (R^2 + Z^2)^2$ が得られる. この曲面は前節で登場したレムニスケートを母線に持つ回転面である (図 3.1 (左)). より一般に, $\text{Tr}(A) = 2t$ の場合,

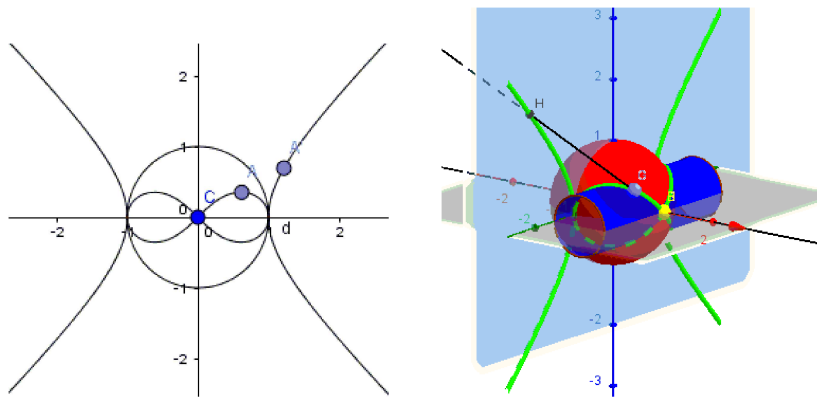


図 3.1: 回転面の母線群.

曲面は次の式で与えられる.

$$(t+1)(Z^2 + R^2)^2 + 2t(Z^2 - R^2) + t - 1 = 0. \quad (6)$$

式 (6) を求めるには若干の計算が必要である. 式 (3) より,

$$R^2 = X^2 + Y^2 = \frac{1 - |u|^2}{(1 + \text{Re}(u))^2}, \quad Z^2 = \frac{|u|^2 - \text{Re}(u)^2}{(1 + \text{Re}(u))^2}$$

であるから,

$$R^2 + Z^2 = \frac{1 - \text{Re}(u)}{1 + \text{Re}(u)}$$

である. したがって,

$$\text{Re}(u) = \frac{1 - R^2 - Z^2}{1 + R^2 + Z^2}, \quad 1 + \text{Re}(u) = \frac{2}{1 + R^2 + Z^2}. \quad (7)$$

以上で $\text{Re}(u)$ が求まったので, R^2 の式に代入することにより,

$$|u|^2 = 1 - \frac{4R^2}{(1 + R^2 + Z^2)^2}. \quad (8)$$

式 (1) より, $t|u|^2 = \text{Re}(u)$ であるから, 上で求めた式 (7) と式 (8) を組み合わせて

$$t\{(1 + R^2 + Z^2)^2 - 4R^2\} = (1 + R^2 + Z^2)(1 - R^2 - Z^2).$$

この式を整理することにより式 (6) が得られる (図 3.2). この回転面の母線を理解

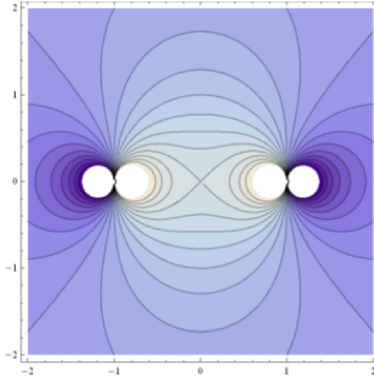


図 3.2: トレースの値が一定の回転面の母線群.

するために, YZ -平面上にある母線 $(t+1)(Z^2 + Y^2)^2 + 2t(Z^2 - Y^2) + t - 1 = 0$ を $(x, y, z) = (-1, 0, 0)$ から単位球面に立体射影してみよう. 関係式

$$(Y, Z) = \frac{(y, z)}{1 + x},$$

より, 次の式が得られる.

$$\left(x - \frac{1}{2t}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2t}\right)^2,$$

この式は, 回転面の母線が, ある空間曲線の立体射影として得られることを示している. すなわち, この空間曲線は, 図 3.1 (右) のように, $x = \frac{1}{2t}$ を軸とし, 半径 $\frac{1}{2t}$ の円柱と単位球面との交線である. 以上で, トレースが一定の曲面が回転面であり, そのすべての母線が単位球面上の空間曲線 (円柱との交線) の立体射影として得られることがわかった.

4 指数写像の可視化

この節では, 一次元部分群である指数写像の形を見てみよう. リー群 $SL(2, \mathbf{R})$ のリー環 $sl(2, \mathbf{R})$ 元は, つぎのようなトレースが 0 の行列からなる ([1] p.245).

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + \gamma \\ \beta - \gamma & -\alpha \end{pmatrix},$$

$T^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)I_2$ を満たすので, 指数写像 e^{tT} は, 次ような3種類となる.

$$e^{tT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} T^n = C(t)I_2 + S(t)T = \begin{pmatrix} C(t) + \alpha S(t) & (\beta + \gamma)S(t) \\ (\beta - \gamma)S(t) & C(t) - \alpha S(t) \end{pmatrix},$$

ここで, $C(t)$ と $S(t)$ は, I_2 での接ベクトルの種類に応じて,

$$(C(t), S(t)) = \begin{cases} (1, t) & (\text{光的 } \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0) \\ (\cosh t, \sinh t) & (\text{空間的 } \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = +1) \\ (\cos t, \sin t) & (\text{時間的 } \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = -1) \end{cases}$$

である. いずれの場合も $C(t)$ と $S(t)$ は

$$C(t)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)S(t)^2 = 1 \quad (9)$$

を満たす. 以下, 簡単のために $C = C(t), S = S(t)$ と表すことにする. 3次元モデルでの像を求めてみよう.

$$r^2 = (a + d)^2 + (b - c)^2 = 4C^2 + 4\gamma^2 S^2, \quad r = 2\sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2}$$

であるから,

$$(X, Y, Z) = \frac{(r(a - d), r(b + c), 2(b - c))}{r^2 + 2(a + d)} = \frac{(\sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2} \alpha S, \sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2} \beta S, \gamma S)}{C^2 + \gamma^2 S^2 + C} \quad (10)$$

となる. 式 (10) から, 指数写像の像は, 平面 $\beta X = \alpha Y$ 上にあることがわかる. また, 単位行列 I_2 での接ベクトルは, $\vec{v} = \frac{1}{2}(\alpha, \beta, \gamma)$ であることもわかる.

指数写像の軌道が Z 軸回りで回転対称であることを見るために, (R, Z) 座標で表してみると,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} S}{C^2 + \gamma^2 S^2 + C} = \frac{\sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2} \sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2 - 1}}{C^2 + \gamma^2 S^2 + C},$$

$$(R, Z) = \frac{(\sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2} \sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2 - 1}, \gamma S)}{C^2 + \gamma^2 S^2 + C}.$$

したがって, 指数写像の軌道は, γ の値が同じであれば, Z 軸回転対称であることがわかる. 図 4.1 は, YZ -平面上の指数写像の軌道である. 緑色の軌道は空間的ベクトルの指数写像の軌道であり, 青色の軌道は時間的ベクトルの指数写像の軌道である. 黒い曲線は, トレースが一定の曲面の母線である. 光的ベクトルの指数写像の軌道はレムニスケート上にある ($C = 1$ より, トレースの値が 2 であることから明らかである).

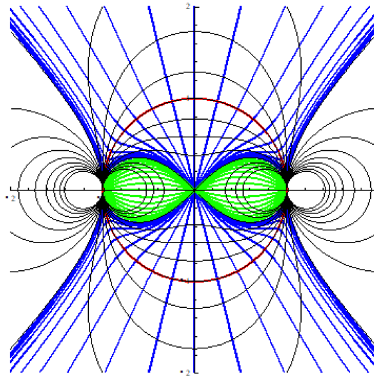


図 4.1: 指数写像の軌道.

指数写像の軌道を幾何的に理解してみよう. 結論から言うと, 2 節で紹介した曲線のリサージュ曲線と関係がある.

$\alpha = 0$ として, YZ -平面上の軌道を見てみると, $C^2 + (\gamma^2 - \beta^2)S^2 = 1$ より,

$$(Y, Z) = \frac{(\sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2} \sqrt{C^2 + \gamma^2 S^2 - 1}, \gamma S)}{C^2 + \gamma^2 S^2 + C} = \frac{(\sqrt{1 + \beta^2 S^2} \beta S, \gamma S)}{1 + \beta^2 S^2 + C}.$$

YZ -平面上の軌道を単位球面 S^2 に $P = (-1, 0, 0)$ から立体射影してみよう. 球面上の点の Y, Z 座標を y, z とすると,

$$(y, z) = \frac{2(Y, Z)}{1 + Y^2 + Z^2}$$

である. 球面上の y, z の座標を求めるために, まず, $Y^2 + Z^2$ と $1 + Y^2 + Z^2$ を次のように計算しておく.

$$\begin{aligned} Y^2 + Z^2 &= \frac{(1 + \beta^2 S^2) \beta^2 S^2 + \gamma^2 S^2}{(1 + \beta^2 S^2 + C)^2} = \frac{(1 + \beta^2 S^2) \beta^2 S^2 + 1 + \beta^2 S^2 - C^2}{(1 + \beta^2 S^2 + C)^2} \\ &= \frac{(1 + \beta^2 S^2)^2 - C^2}{(1 + \beta^2 S^2 + C)^2} = \frac{1 + \beta^2 S^2 - C}{1 + \beta^2 S^2 + C}. \\ 1 + Y^2 + Z^2 &= \frac{2(1 + \beta^2 S^2)}{1 + \beta^2 S^2 + C}. \end{aligned}$$

よって, 球面上の y, z の座標は次のようになる.

$$(y, z) = \frac{2(Y, Z)}{1 + Y^2 + Z^2} = \frac{(\sqrt{1 + \beta^2 S^2} \beta S, \gamma S)}{1 + \beta^2 S^2}.$$

さて, この y, z が満たす関係式は次のようになる.

$$y^2 - y^4 = y^2(1 - y^2) = \frac{\beta^2 S^2}{1 + \beta^2 S^2} \left(1 - \frac{\beta^2 S^2}{1 + \beta^2 S^2}\right) = \frac{\beta^2 S^2}{(1 + \beta^2 S^2)^2} = \frac{\beta^2}{\gamma^2} z^2,$$

したがって,

$$z^2 = \frac{\gamma^2}{\beta^2}(y^2 - y^4). \quad (11)$$

式 (11) は, リサージュ曲線 $z^2 = y^2 - y^4$ を z 軸方向に伸縮させたものになっている. 接ベクトルが空間的であれば, γ^2/β^2 は 1 より小さいので, z 軸方向に縮めたりリサージュ曲線を球面に x 軸方向から投影してできる球面上の曲線となる. 接ベクトルが時間的であれば, 逆に z 軸方向に伸ばしたりリサージュ曲線を球面に x 軸方向から投影してできる球面上の曲線となる (図 4.2). このように, 指数写像の軌道を

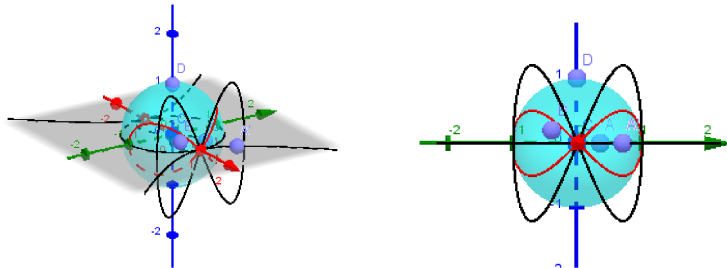


図 4.2: z 方向に伸縮させたりサージュ曲線.

幾何的に理解することができる.

5 上三角行列のなすの部分群の可視化

最後に, 2 次元のひろがりを持つ部分群の形を調べよう. 次のような上三角行列からなる行列は, 部分群をなす. 以下, $a > 0$ として, 計算を簡単にするために次のように t, b' を定める.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2b' \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$r^2 = (a+d)^2 + (b-c)^2 = 4(\cosh^2 t + b'^2)$ であるから,

$$(X, Y, Z) = \frac{(r(a-d), r(b+c), 2(b-c))}{r^2 + 2(a+d)} = \frac{(\sqrt{\cosh^2 t + b'^2} \sinh t, \sqrt{\cosh^2 t + b'^2} b', b')}{\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t} \quad (12)$$

となる. パラメータの t, b' を消去するために, 以下の 3 つの値を求めておく.

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{(\cosh^2 t + b'^2)(\sinh^2 t + b'^2) + b'^2}{(\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t)^2} = \frac{\cosh^2 t + b'^2 - \cosh t}{\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t},$$

$$1 + X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{2(\cosh^2 t + b'^2)}{\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t}, \quad 1 - X^2 - Y^2 - Z^2 = \frac{2 \cosh t}{\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t}.$$

このとき,

$$\begin{aligned} Y\sqrt{(1-X^2-Y^2-Z^2)^2+4Z^2} &= \frac{\sqrt{\cosh^2 t + b'^2}b'\sqrt{4\cosh^2 t + 4b'^2}}{(\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t)^2} \\ &= \frac{2(\cosh^2 t + b'^2)b'}{(\cosh^2 t + b'^2 + \cosh t)^2} = (1+X^2+Y^2+Z^2)Z. \end{aligned}$$

よって, 求める曲面の方程式は,

$$(1+X^2+Y^2+Z^2)Z = Y\sqrt{(1-X^2-Y^2-Z^2)^2+4Z^2}$$

となる (図 5.1). この曲面は, 平面 $Y = Z$ に含まれるベクトル $\vec{v} = \frac{1}{2}(\alpha, \beta, \beta)$ を接

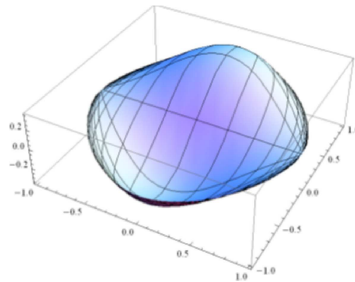


図 5.1: 上三角行列の成すの部分群.

ベクトルに持つ光的, および空間的指数写像の像 (図 4.1 の緑色の軌道) からできている.

謝辞

本研究は, 京都大学数理解析研究所共同事業「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」による成果である.

参考文献

- [1] 小林俊行・大島利雄『リー群と表現論』岩波書店, 2005.
- [2] 谷口雅彦・奥村善英『双曲幾何学への招待—複素数で視る—』培風館, 1996.
- [3] 前田陽一 動的幾何学ソフトウェアによる実特殊線形変換群 $SL(2, \mathbb{R})$ の 3 次元モデル, 数理解析研究所講究録 1951, PP. 49-53, 2015.